

文章编号: 1000-8055(2004)03-0310-05

# 薄壳结构失稳临界载荷的并行计算

李丽君<sup>1</sup>, 金先龙<sup>1</sup>, 李渊印<sup>1</sup>, 李根国<sup>2</sup>

(1 上海交通大学 高性能计算中心, 上海 200030;

2 上海超级计算中心, 上海 201203)

**摘要:** 以大型有限元分析软件为开发平台, 研究了弹性结构屈曲分析的并行计算方法及软件实现, 并针对大规模超级计算机的硬件环境编写了屈曲分析的并行求解程序; 通过开发软件接口, 将并行求解程序作为子模块嵌入串行有限元分析软件的求解序列中, 并使其可直接调用; 针对有限元前后处理器开发了风格一致的客

**关键词:** 航空、航天推进系统; 屈曲; 并行; 有限元; 预处理

**中图分类号:** V 231.9; O 241

**文献标识码:** A

## Parallel Computing for Buckling Load of Thin Shell Structure

L I L i-jun<sup>1</sup>, J N X ian-long<sup>1</sup>, L i Yuan-yin<sup>1</sup>, L I Gen-guo<sup>2</sup>

(1 High Performance Computing Center,

Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China;

2 Shanghai Super Computing Center, Shanghai 201203, China)

**Abstract:** This paper describes the study and implementation of parallel algorithm and software for static buckling analysis. The research takes advantage of advanced serial finite element analysis code, MSC. NASTRAN as development platform, and massively parallel computer as parallel environment. The dominating computing work of elastic structure static buckling analysis was parallelized, and the parallel solver was implemented in Fortran90 and MPI. Moreover, the parallel solver was embedded into the original solution sequence as a sub-module, and could be called directly. For convenient use, the development for friendly interface was implemented. The integrated software, which includes serial pre-and postprocessors with parallel solver, can improve the scale and speed of linear buckling analysis for thin shell structure.

**Key words:** aerospace propulsion system; buckling; parallel; finite element; precondition

屈曲分析主要研究结构在特定载荷作用下的稳定性以及确定结构失稳的临界载荷与屈曲模态。随着现代工业技术的发展, 大量轻型高强度的薄壳结构广泛应用于各个领域, 如飞机、导

弹、发射筒和各种容器等。薄壳结构的一般特点是跨度大、厚度小、自重轻, 其稳定问题往往决定着结构的承载力, 因此薄壳结构稳定性的研究在工程实际中有着重要意义。

收稿日期: 2003- 06- 16; 修订日期: 2003- 12- 29

联系人: 金先龙

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60273048)

作者简介: 李丽君(1977- ), 女, 山东淄博人, 上海交通大学高性能计算中心博士生, 主要从事结构分析, 并行计算研究

串行机受内存容量与运算速度的限制, 不能满足薄壳结构稳定性分析的规模、速度和精度等日益提高的要求, 所以稳定性分析并行算法和软件的研究至关重要。以已有串行有限元分析软件为基础建立并行化屈曲分析集成软件, 能够有效提高结构屈曲分析的规模和效率, 拓宽原串行有限元软件的应用范围。

## 1 屈曲分析的原理<sup>[1, 2]</sup>

线弹性屈曲分析又称特征值失稳分析, 可归结为求解方程式:

$$|[K_a]| + \lambda|[K_d]| = 0 \quad (1)$$

式中,  $[K_a]$  表示结构刚度矩阵,  $[K_d]$  表示微分刚度矩阵,  $\lambda$  为最小特征值。结构失稳临界载荷为:

$$f_{cr} = \lambda^* f_a \quad (2)$$

式中,  $f_{cr}$  表示失稳临界载荷,  $f_a$  表示施加的静力载荷。

由于微分刚度法考虑了高阶应力应变关系, 较一般的限定载荷量级法具有更高的精确度和可靠性。微分刚度矩阵是几何、单元类型与所受荷载的函数, 也称为几何刚度矩阵。求解微分刚度矩阵, 首先要通过静力分析求解结构的应力, 所以屈曲分析问题首先要进行线性方程组的求解:

$$[K_a]\{u\} = \{f_a\} \quad (3)$$

式中,  $u$  表示位移向量。

由以上分析可知, 屈曲分析并行化的主要任务是线性方程组(3)和特征值求解(1)的并行计算。

## 2 屈曲分析的并行计算

### 2.1 并行计算基本方法

针对“神威 I”并行机的硬件条件, 在 MPI (Message Passing Interface) 并行编程环境下, 用 Fortran90 语言编写的并行求解程序, 是基于域分解思想的 SPMD (Single Program MultiData) 型并行程序, 各节点均运行相同的程序, 但对不同的数据执行操作。并行程序采用无主机结构, 程序整个运行在计算节点上, 控制节点为计算节点提供 I/O 服务和计算节点所不具备的操作系统请求服务。

线性方程组(3)采用并行预处理共轭梯度法, 即 PPCG (Parallel Preconditioned Conjugate Gradient) 法<sup>[3~5]</sup>求解, 可以充分利用系统矩阵的稀疏性, 并通过预处理降低矩阵的条件数来提高收敛

速度。预处理矩阵通过 A SM (Additive Schwarz Method) 得到。特征值求解采用并行 Arnoldi 算法<sup>[6]</sup>。

### 2.2 屈曲分析并行求解过程<sup>[7, 8]</sup>

设计算节点数为  $N$ , 并行屈曲分析的主要计算过程如下:

(1) 并行计算环境初始化;

(2) 数据分布: 控制节点读取有限元软件输出的数据  $K_a$  和  $f_a$ , 对于  $i = 1, 2, \dots, N$ , 把  $K_a$  和  $f_a$  分为  $N$  块, 得到的块矩阵  $K_a^i$  和  $f_a^i$  通过节点间通信传输到各计算节点, 计算节点将得到的数据块进行重新排序, 以降低矩阵带宽, 使矩阵保持相当的稀疏性;

(3) 并行执行 A SM 预处理, 求出预处理矩阵  $M^i$ : A SM 是一种区域分解算法, 将空间分割为不重和的  $N$  个子区域:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega^i = \Omega \quad (4)$$

定义  $R^i$  为  $n^i \times n$  的算子矩阵, 其元素由 0, 1 组成, 表达节点间的连接信息, 可将  $\Omega$  中的向量转换为  $\Omega^i$  中的向量, 即只保留系统向量中对应本节点的子向量, 则通过零填充将  $\Omega^i$  中的向量转换为  $\Omega$  中的向量。对于  $k = 1, 2, \dots$

$$r_k = f_a - K_a u_k \quad (5)$$

$$K_a^i e^i = R^i r_k \quad (6)$$

$$u_{k+1} = u_k + \sum_{i=1}^N (R^i)^T e^i = u_k + M^{-1} r_k \quad (7)$$

$$M^{-1} = \sum_{i=1}^N (R^i)^T (K_a^i)^{-1} R^i \quad (8)$$

收敛条件为  $\alpha \ll 1$ ,  $\alpha = \|I - M^{-1} K_a\|$ 。A SM 的最大优点就是各子块的运算互不干扰, 易于并行。

(4) 方程组并行求解: 设初始值  $u_0 = 0$ ,  $r_0^i = f_a^i$ ,  $d_0^i = M^i r_0^i$ ,  $p$  为位移向量的共轭梯度方向,  $p_0^i = d_0^i$ , 对于  $k = 1, 2, \dots$

$$q^i = K_a^i p^i \quad (9)$$

$$\alpha = [(r^i)^T d^i] / [(p^i)^T q^i] \quad (10)$$

$$u_{new}^i = u^i + \alpha p^i \quad (11)$$

$$r_{new}^i = r^i - \alpha p^i \quad (12)$$

$$d_{new}^i = M^i r^i \quad (13)$$

$$\beta = [(r_{new}^i)^T d_{new}^i] / [(r^i)^T d^i] \quad (14)$$

$$p_{new}^i = d_{new}^i + \beta p^i \quad (15)$$

满足停止条件时收集各节点的计算结果, 结束方

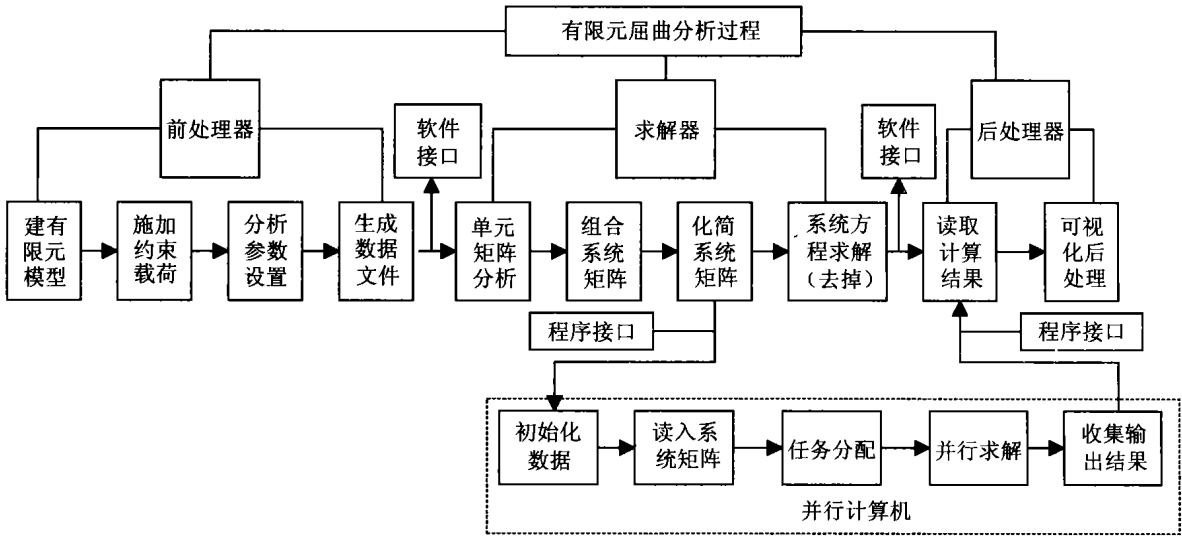


图1 并行化屈曲分析流程

Fig. 1 Flow chart of parallel buckling analysis

程组求解。

(5) 求出几何刚度矩阵, 特征值并行求解程序读入系统刚度矩阵及几何刚度矩阵, 进行如(2)的数据分布, 各计算节点的矩阵块为  $K_a^i$  和  $K_d^i$ ;

(6) 并行执行谱变换: 由于Arnoldi算法易于收敛到模最大的特征值, 为此首先采用平移-逆变换的谱变换技术将最低阶特征值映射为模最大的特征值。方程(1)等价于:

$$(K_a - \mu K_d)^{-1} K_d x = x \theta \quad (16)$$

其中  $\theta = 1/(\lambda - \mu)$ 。

令  $A = (K_a - \mu K_d)^{-1} K_d$ , 方程转化为标准特征值问题  $Ax = \theta x$ 。将  $A$  分布到各节点, 得到  $A^i$ ;

(7) 限定 Krylov 子空间的维数为  $m, m \ll n$ , 令  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 0, v_0 = 0$ , 在控制节点上选择初始向量  $v_1$ , 使  $\|v_1\|_2 = 1$ , 按块矩阵  $A^i$  的维数生成块向量  $v_1^i$ , 并传送到各节点; 对于  $k = 1, 2, \dots, m$

$$\omega^* = (A v_k - \beta_k v_{k-1})^i \quad (17)$$

$$\alpha_k = \omega^T v_k^i \quad (18)$$

利用节点间通信进行规约计算, 得到;

$$\omega^* = \omega - \alpha_k v_k^i \quad (19)$$

$$(\beta_{k+1}^i)^2 = \|\omega^*\|^2 \quad (20)$$

利用节点间通信进行规约计算, 得到:

$$v_{k+1}^i = \omega^* / \beta_{k+1}^i \quad (21)$$

$$H_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

在每个计算节点上, 求解  $H_m$  的特征值及对应的特征向量, 计算节点将期望值是否收敛的信息传递给控制节点。若收敛, 求解原问题的特征值和特征向量, 结束计算。

### 3 并行屈曲分析有限元平台开发

利用大型商业有限元分析软件MSC. NASTRAN 提供的二次开发语言DMAP (Direct Matrix Abstract Programming) 作为软件接口的开发工具, 实现以下功能:

(1) 以占空间最小的压缩二进制格式输出和读入数据;

(2) 将原求解序列中的串行求解模块在不影响其它模块的前提下去掉, 将并行求解程序编译为子模块, 嵌入NASTRAN 原求解序列, 并可通过SHELL 程序调用;

(3) 内部程序执行过程可暂时挂起, 转而执行外部程序, 结束后返回内部程序。

结构并行化屈曲分析流程如图1所示, 串行分析序列完成系统矩阵组装后输出系统矩阵, 调用外部的并行程序进行求解, 求解后返回原序列, 读入并行求解的结果, 继续后处理等过程。MSC. PATRAN 是MSC. NASTRAN 的前后处理器, 利用其开发工具PCL (Patran Command Language) 语言, 可生成并行化屈曲分析所需的特定用户界面, 使并行分析操作可视化。图2为并行屈曲分析的主菜单。



图2 并行化屈曲分析流程

Fig 2 Flow chart of parallel buckling analysis

4 算例验证及分析

建立一个薄壁圆筒的模型, 各项参数包括: 弹性模量  $E=1\times 10^7$ , 泊松比为0.3, 剪切模量为3 846 150, 厚度为0.762 mm, 半径为254 mm, 长度为508 mm。用MSC PATRAN 划分网格, 自由度数目分别为 $10\times 10^4$ ,  $15\times 10^4$ ,  $20\times 10^4$ 。圆筒一端固定约束, 另一端利用多点约束 MPC (Multi Point Constraint) 方法施加均匀分布的轴向载荷。模型如图3所示。分别以“神威 I”的多个节点进行并行求解, 得到屈曲临界载荷  $f_{cr}$  为155, 367 N, 屈曲模态呈图4所示的轴对称环带状波纹。

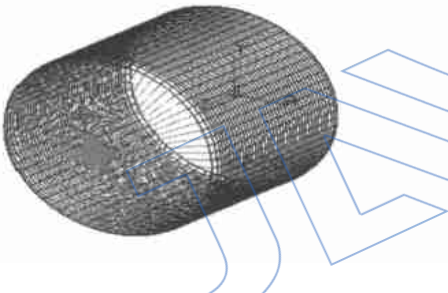


图3 圆筒的有限元模型

Fig 3 Finite element model of cylinder



图4 圆筒的屈曲模态

Fig 4 Buckling modal of cylinder

分段加速比是评价并行算法可扩展性的常用指标, 以选定处理器个数的计算时间为基准, 其余处理器个数计算时间与之求比值。在并行计算结果与MSC Nastran 串行计算结果在相对误差达到 $10^{-4}$ 数量级的前提下, 得到如图5所示的并行分段加速比。

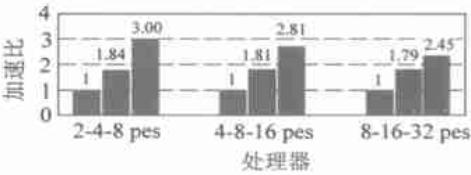


图5 并行屈曲分析的分段加速比

Fig 5 Speed-up of parallel buckling analysis

上述计算说明并行程序有良好的加速比和扩展性, 屈曲分析的并行求解方法与软件开发集成正确可行。

5 结 论

并行化屈曲分析软件系统把串行分析过程中与有限元网格节点等信息无关且计算量极大的数学问题提取出来并行计算, 并进行相关的软件开发与可视化集成, 使原软件强大的网格处理能力和并行机的高性能计算能力有机结合起来, 有效地扩大了屈曲分析的规模, 提高了分析效率, 为结构失稳临界载荷的求解提供了有力工具, 并且为弹塑性屈曲分析并行算法与软件的研究提供了基础。

参考文献

[1] 曹航, 朱梓根 转动壳体外压屈曲的有限元分析[J]. 航空动力学报, 2002, 17(5): 605- 609  
CAO Hang, ZHU Zirgen Finite Element Method Analysis of Rotating Shell Buckling Journal of Aerospace Power, 2002, 17(5): 605- 609

[2] 肖道国, 王熙, 苏丹 层合圆柱体表层局部分层屈曲及其扩展[J]. 固体力学学报, 2002, 23(4): 463- 470

[3] 祝恩淳, Calladine C R. 均匀轴压圆柱薄壳的稳定性分析[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 2000, 33(4): 12- 15

[4] Zucchini A. A Parallel Preconditioned Conjugate gradient solution method for Finite Element Problem with Coarse-Fine Mesh Formulation[J]. Computers and Structures, 2000, 78: 781- 787.

[5] 张朝阳, 孙炳楠, 唐锦春 结构分析的并行预处理共轭梯度法[J]. 浙江大学学报, 1997, 31(3): 380- 386

[6] Morgan R B. On Restarting the Arnoldi Method for Large Non-Symmetric Eigenvalue Problems [J]. Mathematics of Computation, 1996, 65(215): 1213- 1230

[7] 吕全义, 叶天麒 在MM D 型机上求解板的临界载荷的一种并行算法[J]. 航空学报, 1994, 15(8): 975- 979

[8] Katagiri T, Kanada Y. An Efficient Implementation of Parallel Eigenvalue Computation for Massively Parallel Processing [J]. Parallel Computing, 2001, 27(14): 1831- 1845